УДК 512.57:515.14
DOI: 10.36979/1694-500X-2026-26-4-4-11

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЁННОГО СПЕЦИАЛЬНОЙ МОДУЛЯРНОЙ РЕШЁТКОЙ

А.М. Асанбеков, П.С. Панков

Аннотация. В универсальной алгебре и теории решёток одной из центральных задач является проблема стандартности для квазимногообразий алгебр. Эта проблема, сформулированная Д.М. Кларком, Б.А. Дэви, М. Джексоном и Д. Питкетли в 2008 году, заключается в следующем: какие конечные решётки порождают стандартные топологические квазимногообразия? Эта задача непосредственно связана с вопросом о конечной базируемости решёток, а именно: какие конечные решётки имеют конечный базис квазитождеств? Постановка этого вопроса восходит к работе В.А. Горбунова и Д.М. Смирнова в 1979 году. В данной работе установлены достаточные условия, при которых конечная модулярная решётка порождает неконечно аксиоматизируемое и нестандартное топологическое квазимногообразие. Построены соответствующие примеры, демонстрирующие реализуемость этих условий, и получено обобщение, подтверждающее существование бесконечного семейства таких решёток.

Ключевые слова: решётка; квазимногообразие; неконечно аксиоматизируемое квазимногообразие; стандартное квазимногообразие.

АТАЙЫН МОДУЛЯРДУУ ТОР ТАРАБЫНАН ТҮЗҮЛГӨН КӨП ТҮСПӨЛДҮКСЫМАЛДЫН ТОПОЛОГИЯЛЫК КАСИЕТТЕРИ

А.М. Асанбеков, П.С. Панков

Аннотация. Универсалдык алгебра жана торлор теориясында алгебралардын көп түспөлдүксымалдар үчүн стандарттуулук маселеси борбордук маселелердин бири болуп саналат. Бул маселе Д.М. Кларк, Б.А. Дэви, М. Жексон жана Д. Питкетли тарабынан 2008-жылы көтөрүлгөн жана төмөнкү суроону камтыйт: кайсы бир чектүү торлор стандарттык топологиялык көп түспөлдүксымалдарды жаратат? Бул маселе чектүү торлордун чектүү негизи маселеси менен тыгыз байланыштуу, тактап айтканда: кайсы чектүү торлордо *теңдешсималдардын* чектүү негизи бар? Бул суроонун алгачкы коюлушу В. А. Горбунов менен Д. М. Смирновдун 1979-жылдагы ишинде берилген. Бул иште чектүү модулярдуу тор тарабынан чексиз аксиоматташтырылган *жана стандарттуу эмес* көп түспөлдүксымал *түзүүчү* жетиштүү шарттар белгиленет. Бул шарттардын ишке ашарын көрсөткөн тиешелүү мисалдар курулуп, ошондой эле мындай торлордун чексиз топтому бар экенин тастыктаган жалпылоо алынат.

Түйүндүү сөздөр: торчо; көп түспөлдүксымал; чексиз аксиоматташтырылган көп түспөлдүксымал; стандарттуу көп түспөлдүксымал.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF A QUASIVARIETY GENERATED BY A SPECIAL MODULAR LATTICE

A.M. Asanbekov, P.S. Pankov

Abstract. In universal algebra and lattice theory, one of the central questions is the standardness problem for quasivarieties of algebras. This problem, formulated by D.M. Clark, B.A. Davey, M. Jackson and J. Pitkethly in 2008, asks: which finite lattices generate standard topological quasivarieties? This problem is closely related to the question of finite axiomatizability of lattices, namely: which finite lattices have a finite basis of quasi-identities?The formulation of this question goes back to the work of V.A. Gorbunov and D.M. Smirnov in 1979. In this work, sufficient conditions are established under which a finite modular lattice generates a non-finitely axiomatizable and non-standard topological quasivariety. Corresponding examples demonstrating the realizability of these conditions are constructed, and a generalization is obtained that confirms the existence of an infinite family of such lattices.

Keywords: lattice; quasivariety; non-finitely axiomatizable quasivariety; standard quasivariety.

Введение. В теории решёток и универсальной алгебре сформулирована фундаментальная задача: какие конечные решётки порождают стандартные топологические квазимногообразия? Эту задачу, известную как проблема стандартности для квазимногообразий алгебр, поставили в [1]. В [2] доказано, что каждая конечная решётка имеет конечный базис тождеств. Для квазитождеств аналогичное утверждение неверно: в [3] приведён первый пример конечной решётки, не имеющей конечного базиса квазитождеств. Позднее в [1] было показано, что решётка Белкина порождает нестандартное топологическое квазимногообразие. В [4] доказано, что каждая конечная решётка порождает стандартное топологическое многообразие.

Современные исследования показывают, что вопросы, связанные со стандартностью и конечной базируемостью квазимногообразий, активно развиваются. В обзоре [5] дано систематическое изложение подходов к изучению нестандартных квазимногообразий. Аналогичные направления рассматривались также в работах [6–8], где исследуются топологические свойства квазимногообразий и вопросы, связанные с конечными и неконечными базисами конечных решёток.

Цель работы – установить достаточные условия, при которых конечная модулярная решётка порождает неконечно аксиоматизируемое и нестандартное топологическое квазимногообразие, а также предъявить соответствующие примеры и их обобщения.

Основные определения. Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел. *Квазимногообразием* называется класс алгебр, замкнутый относительно подалгебр, прямых произведений и ультрапроизведений. Эквивалентно, квазимногообразие – это класс алгебр, аксиоматизируемый с помощью квазитождеств. *Квазитождество* – это универсальное Хорново предложение с непустой положительной частью, то есть предложение вида

$$\left(\forall\overline{x}\right)\left[p_1\left(\overline{x}\right)\approx q_1\left(\overline{x}\right)\wedge\ldots\wedge p_n\left(\overline{x}\right)\approx q_n\left(\overline{x}\right)\to p\left(\overline{x}\right)\approx q\left(\overline{x}\right)\right],$$

где $\overline{x}=\left(x_1,\ldots,x_m\right)$, и $p,q,p_1,q_1,\ldots,p_n,q_n$ – термы сигнатуры σ.

Многообразие – это класс алгебр, замкнутый относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Согласно теореме Биркхофа, многообразие – это класс алгебр, аксиоматизируемых системой тождеств, то есть предложений вида $\left(\forall\overline{x}\right)\left[s\left(\overline{x}\right)\approx t\left(\overline{x}\right)\right]$, где $s\left(\overline{x}\right)$ и $t\left(\overline{x}\right)$ – термы сигнатуры A. Обозначим через $V\left(K\right)\left(\boldsymbol{Q}\left(K\right)\right)$ наименьшее многообразие (квазимногообразие), содержащее класс K.

Тройка $\langle A,\sigma,\tau\rangle$ называется топологической алгеброй, если $\langle A,\sigma\rangle$ – алгебра сигнатуры $\sigma,\langle A,\tau\rangle$ – топологическое пространство, и каждая операция из σ непрерывна относительно топологии τ. Топология τ называется *булевой*, если она компактна, хаусдорфова и вполне несвязна. Топологическая алгебра $A_\tau=\langle A,\sigma,\tau\rangle$ называется булевой, если её топология булева.

Конечная алгебра A, снабжённая дискретной топологией τ, порождает топологическое квазимногообразие $\boldsymbol{Q}_\tau\left(A\right)$, состоящее из всех топологически замкнутых подалгебр ненулевых прямых степеней A, снабжённых топологией произведения. Алгебра A называется проконечной относительно класса алгебр K, если она изоморфна обратному пределу конечных алгебр из K.

Топологическое квазимногообразие $Q_\tau(A)$ называется стандартным, если любая булева топологическая алгебра, алгебраический редукт которой принадлежит $Q(A)$, является проконечной относительно $Q(A)$.

Квазимногообразие K имеет конечный базис квазитождеств, если существует конечное множество Σ квазитождеств такое, что $K = Mod(\Sigma) = \{A \mid A \vDash \Sigma\}$. Решётка A имеет конечный базис квазитождеств, если порождённое ею квазимногообразие $Q(A)$ конечно аксиоматизируемо. Если $Q(A)$ не конечно аксиоматизируемо, то решётка A не имеет конечного базиса квазитождеств.

Конгруэнция θ на алгебре A называется *тривиальной*, если она является наименьшим или наибольшим элементом решётки конгруэнций $ConA$. Гомоморфизм $h: A \to B$ называется *нетривиальным* (*собственным*), если его ядро $\ker h$ нетривиально.

Множество X называется точечно неразделимым относительно квази-многообразия R, если существуют такие $a, b \in X$, что $a \neq b$ и для любого $n \in \mathbb{N}$, любой конечной структуры $M \in R$ и любого гомоморфизма $\varphi: X_n \to M$ выполняется $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Теорема 1 [9]. Локально конечное квазимногообразие K не является конечно аксиоматизируемым, если для любого натурального числа n существует конечная алгебра A_n, такая что $A_n \notin K$, но любая собственная подалгебра A_n принадлежит K.

Теорема 2 [2]. Пусть $X = \varprojlim \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – сюръективный обратный предел конечных алгебр, и K – квазимногообразие. Если $X_n \notin K$, $X \in K$ и X является точечно неразделимым относительно K, а каждая подалгебра X_n, порождённая не более чем n элементами, принадлежит K для всех $n \in \mathbb{N}$, то K является нестандартным.

Построение решёток. Пусть $M_3, M_{3,3}, M_{3-3}$ – это решётки, изображённые на рисунке 1.

Построим модулярную решётку L_n (рисунок 2) по индукции:

$n = 1$. $L_1 \cong M_3$ и $L_1 = a_1, b_1, c_1$.

$n > 1$. $L_n = L_{n-1} \cup a_n, b_n, c_n$, где $b_n = c_{n-1}$ и $c_n, a_n \notin L_{n-1}$, $a_n \wedge c_i = c_n \wedge c_i \notin L_{n-1}$ и $a_n \vee c_i = c_n \vee c_i \notin L_{n-1}$ для всех $i < n$.

Теперь построим модулярную решётку A_n следующим образом:

$A_n = L_n \cup a_0, b_0, c_0$, где $a_0, b_0, c_0 \cong M_3$; $a_n \wedge a_2 = c_0 \vee a_0, a_n \wedge a_1 = b_0$ и $1_{L_n} = 1_{A_n}$ (рисунок 3).

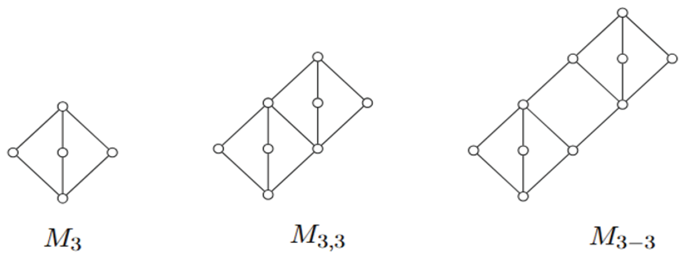

Рисунок 1 – Решётки

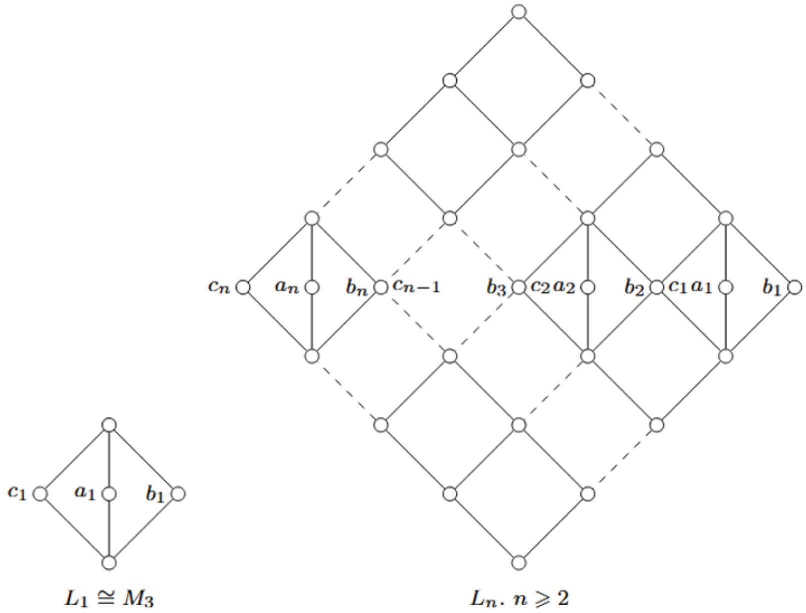

Рисунок 2 – Решётки

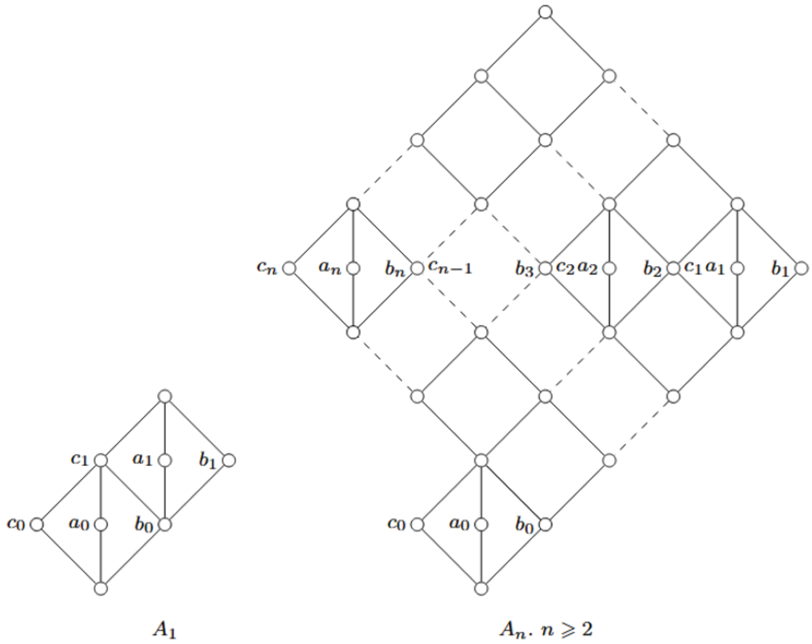

Рисунок 3 – Решётки

Неконечная аксиоматизируемость. Пусть A – решётка, изображённая на рисунке 4.

Теорема 3. Для любого $n > 1$ и нетривиальной конгруэнции $\theta \in ConA_n$ существует $1 < m < n$ такое, что $A_n / \theta \cong A_m$ или $A_n / \theta \cong M_{3,3}$, если $(a_1, b_1) \notin$ ё, в противном случае $A_n / \theta \cong L_m$.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции по $n > 2$. Нетрудно проверить, что для $n = 3$ утверждение верно, так как $A_3 / \theta \cong A_2$ или $A_3 / \theta \cong M_{3,3}$, если $(a_1, b_1) \notin \theta$, в противном случае $A_3 / \theta \cong A_2$ или $A_3 / \theta \cong M_3$ для любой нетривиальной конгруэнции $\theta \in ConA_3$.

Пусть теперь $n > 3$, и пусть элемент u покрывает элемент v в A_n, причём $\theta(u, v) \subseteq \theta$. По построению A_n имеем $A_n / \theta(u, v) \cong A_{n-1}$ или $L_n / \theta(u, v) \cong L_{n-1}$.

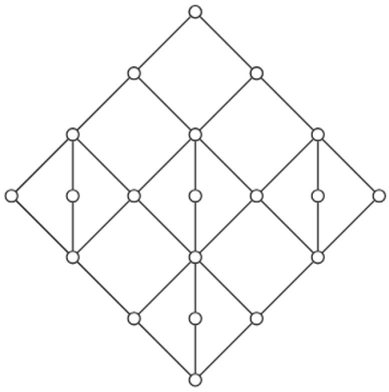

Рисунок 4 – Решётка

Предположим, что $(a_1, b_1) \notin \theta$. Так как для любой нетривиальной конгруэнции $\theta \in ConA_n$ существуют такие элементы $(u, v) \in A_n$, что u покрывает v и $\theta(u, v) \subseteq \theta$, то имеем $A_n / \theta \cong (A_n / \theta(u,v)) / (\theta / \theta(u,v))$. Поскольку $A_n / \theta(u,v) \cong A_{n-1}$, получаем $A_n / \theta \cong (A_n / \theta(u,v)) / (\theta / \theta(u,v)) \cong A_{n-1} / \theta'$, для некоторой $\theta' \in ConA_{n-1}$. По предположению индукции имеем $A_{n-1} / \theta' \cong A_m$ или $A_{n-1} / \theta' \cong M_{3,3}$ для некоторого $m > 0$. Следовательно, $A_n / \theta \cong A_m$ или $A_n / \theta' \cong M_{3,3}$.

Теперь предположим, что $(a_1, b_1) \in \theta$. Тогда $\theta(a_1, b_1) = \theta(u, v)$ и $A_n / \theta(u, v) \cong L_n$. Следовательно,

$$A_n / \theta \cong (A_n / \theta(u,v)) / (\theta / \theta(u,v)) \cong L_{n-1} / \theta', \text{ для некоторой } \theta' \in Con(L_n).$$

Нетрудно проверить, что $L_n / \theta \cong L_m$ для некоторого $m > 0$. Таким образом, $A_n / \theta \cong A_m$ или $A_n / \theta \cong L_m$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Не существует собственного гомоморфизма из A_n в M_{3-3}, A.

Доказательство. Докажем утверждение для гомоморфизма из A_n в M_{3-3}. Нетрудно видеть, что гомоморфизма из A_n в A также не существует.

Пусть $h : A_n \to M_{3-3}$, $n>1$ – собственный гомоморфизм. Тогда $\ker h$ – нетривиальная конгруэнция на A_n. По теореме 3 имеем $A_n / \ker h \cong A_m$ или $A_n / \theta \cong M_{3,3}$ или $A_n / \ker h \cong L_m$ для некоторого $m > 1$. Отсюда $A_m \cong h(A_n) \leq M_{3-3}$. Это невозможно, поскольку по определению $A_m, |A_m| > |M_{3-3}|$ при всех $m > 1$. Следовательно, A_n не может быть подрешёткой M_{3-3}. Очевидно также, что $M_{3,3}$

и L_m не являются подрешётками M_{3-3}. Следовательно, такого гомоморфизма h не существует, что и требовалось доказать.

Пусть S – непустое подмножество решётки L. Обозначим через $\langle S\rangle$ подрешётку L, порождённую множеством S.

Теорема 5. Для каждого $n>2$, решётка A_n обладает следующими свойствами:

i) $A_n \notin Q(A)$;

ii) Каждая собственная подрешётка решётки A_n принадлежит $Q(A)$.

Доказательство.

i) Предположим, что $A_n \in Q(A)$ для некоторого $n>1$. Тогда A_n является подпрямым произведением подпрямо $Q(A)$-неразложимых алгебр. Поскольку каждая $Q(A)$ неразложимая алгебра является подалгеброй A, то A_n есть подпрямое произведение подалгебр A. По теореме 4, не существует собственных гомоморфизмов из A_n на M_{3-3}, A. Следовательно, $A_n \in Q(M_3)$ для всех $n>1$. Это невозможно, так как $M_{3-3} \le A_n$ и $M_{3-3} \notin Q(M_3)$.

ii) Докажем по индукции по n. Для $n \le 2$ утверждение проверяется вручную. Пусть $n>2$ и S – максимальная подрешётка A_n. Так как решётка A_n порожается множеством дважды неразложимых элементов $a_1,\ldots,a_n,a_0,b_1$, то существует $0<i\le n$ такой, что $a_i \notin S$ или $b_1 \notin S$ или $a_0 \notin S$.

Если $b_1 \notin S$, то $S \le_s 2\times M_3 \times L_{n-1}$. Поскольку $L_{n-1} \le_s M_3^{n-1}$, получаем $\langle S\rangle \in Q(M_3) \subset Q(A)$.

Если $a_0 \notin S, B > S \le_s 2\times L_n \le_s 2\times M_3^n \in Q(M_3) \subset Q(A)$.

Если $a_i \notin S$, то поскольку $n>2$ и S – максимальная подрешётка, существуют $i \ne k \ne l$ такие, что $\theta(b_k,c_k), \theta(b_l,c_l) \in ConA\,8\theta(b_k,c_k) \cap \theta(b_l,c_l) = \Delta$.

При этом $A_n/\theta(b_k,c_k) \cong A_n/\theta(b_l,c_l) \cong A_{n-1}$ или $A_n/\theta(b_k,c_k), A_n/\theta(b_l,c_l) = A_{n-1}, L_{n-1}$ для $n \ge 3$. Мы доказали для случая, когда $A_n/\theta(b_k,c_k) \cong A_n/\theta(b_l,c_l) \cong A_{n-1}$. Эти изоморфизмы означают, что $A_n \le_s A_{n-1}\times A_{n-1}$ и $S \le A_{n-1}\times A_{n-1}$. Пусть $h_k : A_n \to A_{n-1}$ и $h_l : A_n \to A_{n-1}$ – гомоморфизмы такие, что $kerh_k = \theta(b_k,c_k)$ и $kerh_l = \theta(b_l,c_l)$. Поскольку $(a_i,b_i) \notin \theta(b_k,c_k) \cup \theta(b_l,c_l))$, то $h_k(S), h_l(S)$ являются собственными подрешётками A_{n-1}. По предположению индукции $h_k(S), h_l(S) \in Q(A)$. Так как $b_k,c_k,b_l,c_l \in S$, то ограничения конгруэнций $\theta_s(b_k,c_k)$ и $\theta_s(b_l,c_l)$ нетривиальны на S. Более того, $\theta_s(b_k,c_k) \cap \theta_s(b_l,c_l) = \Delta_S$. Следовательно, $S \le_S h_k(S)\times h_l(S)$, а $S \in Q(A)$. Поскольку каждая максимальная собственная подалгебра A_n принадлежит $Q(A)$, то и любая собственная подалгебра A_n принадлежит $Q(A)$. Легко проверить, что для случая $\{A_n/\theta(b_k,c_k), A_n/\theta(b_l,c_l)\} = \{A_{n-1}, L_{n-1}\}$ применимы те же рассуждения.

Теорема 6. Квазимногообразие $Q(A)$, порождённое решёткой A, не является конечно аксиоматизируемым.

Доказательство. Согласно теореме 1, необходимо построить бесконечное множество конечных решёток $\{X_i \notin K \mid \ i\rangle 0\}$, таких, что любая собственная подрешётка X_i принадлежит K. Мы покажем, что решётки A_n обладают этим свойством. Действительно, из теоремы 5(i) следует, что $A_n \notin Q(A)$ для всех $n > 1$. Из теоремы 5 (ii) следует, что каждая собственная подрешётка A_n принадлежит $Q(A)$. Следовательно, по теореме 1, $Q(A)$ не является конечно аксиоматизируемым. Что и требовалось доказать.

Нестандартность. Имеет место**.**

Теорема 7. Решётка A порождает нестандартное топологическое квазимногообразие.

Доказательство. Согласно теореме 2, нужно построить $X = \underline{\lim}\{X_n \mid n \in N\}$ – сюръективный обратный предел конечных решёток таких, что $X_n \notin Q(A)$, каждая n порожденная подрешётка X_n принадлежит $Q(A)$ *8* $X \in Q(A)$ точечно неразделима относительно $Q(A)$.

В качестве X_n мы возьмём решетки A_n (см. рисунок 3). Согласно теореме 5, имеем:

i) $A_n \notin Q(A)$;

ii) Каждая собственная подрешётка решётки A_n принадлежит $Q(A)$.

Теперь построим обратный предел.

Пусть $\varphi_{n,n-1}$ – это гомоморфизм из A_n в A_{n-1} такой, что $\ker \varphi_{n,n-1} = ё\,(a_n, b_n)$, и $\varphi_{n,n}$ тождественное отображение для всех $n > 1$ и $m < n.$ И пусть $\varphi_{n,m} = \varphi_{m+1,m} \circ \ldots \circ \varphi_{n,n-1}$. Можно проверить, что $\{A_n; \varphi_{n,m}, \mathbb{N}\}$ образует обратный спектр. Обозначим $L = \underline{\lim}\{A_n \mid n \in N\}$ и покажем, что $L \in Q(A)$.

Пусть α – квазитождество следующего вида:

$\&_{i \le r}\, p_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) \approx q_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) \to p(x_0, \ldots, x_{n-1}) \approx q(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

Предположим, что α выполняется на $Q(A)$ и $L \vDash p_i(a_0, \ldots, a_{n-1}) = q_i(a_0, \ldots, a_{n-1})$ для всех $i < r$, и некоторых $a_0, \ldots, a_{n-1} \in L.$ Из определения обратного предела имеем, что $L \le_s \prod\{L_i | i\, I\}$. Следовательно,

$L_s \vDash p_i(a_0(s), \ldots, a_{n-1}(s)) = q_i(a_0(s), \ldots, a_{n-1}(s))$ для всех $i < r$.

Каждая собственная подрешётка решётки A_n принадлежит $Q(A)$ для всех $s > n$, согласно теореме 6 (ii). Поэтому α истинно в L_s для всех $s > n$. Это влечёт: $L_s \vDash p(a_0(s), \ldots, a_{n-1}(s)) = q(a_0(s), \ldots, a_{n-1}(s))$. Так как $a_i(m) = \varphi_{s,m}(a_i(s))$ для всех $0 \le i < n$ и $m < s$, то получаем

$L_m \vDash p(a_0(m), \ldots, a_{n-1}(m)) = q(a_0(m), \ldots, a_{n-1}(m))$ для всех $m < s$.

Таким образом, $L \vDash p(a_0, \ldots, a_{n-1}) = q(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Следовательно, $L \vDash \alpha$ для любого α, которое выполняется в $Q(A)$. Это доказывает, что $L \in Q(A)$.

Чтобы завершить доказательство, нам нужно показать, что L точечно неразделима относительно $Q(A)$. По определению $\varphi_{n,n-1}$ известно, что $\varphi_{n,m}(a_1) = a_1$ и $\varphi_{n,m}(b_1) = b_1$. А из определения обратного предела следует, что $a = (a_1, \ldots, a_1, \ldots)$, $b = (b_1, \ldots, b_1, \ldots) \in L$. Пусть $\varphi : L \to M$ гомоморфизм, где $M \in Q(A)$ и M – конечная решётка. Существует $n > 2$ и гомоморфизм $\psi_M : A_n \to M$ такой, что $\alpha = \varphi_n \circ \psi_M$ для некоторого сюръективного гомоморфизма $\varphi_n : L \to A_n$ (по универсальному свойству обратного предела). Так как $\psi_M(L_n) \le M \le (A)^k$ для некоторого $k > 0$, то по теореме 4 получаем, что $\psi_M(L_n)$ тривиальна, то есть $\psi_M(x) = 1$ для всех $x \in A_n$. И так мы получаем $\alpha(a)=\alpha(b)$. Что и требовалось доказать.

Отметим, что изложенные выше рассуждения допускают естественное обобщение. Можно установить существование бесконечного семейства конечных модулярных решёток, обладающих теми же ключевыми свойствами, что и решётка A. Это приводит к следующему результату.

Теорема 8. Пусть L – конечная решётка такая, что $M_{3,3} \not\le L$, $A \le L$ и $A_n \not\le L$ для всех $n > 1$. Тогда топологическое квазимногообразие, порождённое решёткой L, является нестандартным.

Иначе говоря, при указанных ограничениях на вложения подрешёток решётка L порождает нестандартное топологическое квазимногообразие.

Заключение. В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых конечная модулярная решётка порождает неконечно аксиоматизируемое и нестандартное топологическое квазимногообразие. Построенные примеры демонстрируют реализуемость этих условий, а полученное обобщение подтверждает существование бесконечного семейства таких решёток.

Поступила: 24.02.2026; рецензирована: 09.03.2026; принята: 11.03.2026.

Литература

1. *Clark D.M.* The axiomatizability of topological prevarieties / D.M. Clark, B.A. Davey, M.G. Jackson, J.G. Pitkethly // Advances in Mathematics. 2008. № 218. P. 1604–1653. URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.03.020.
2. *McKenzie R.* Equational bases for lattice theories // Mathematica Scandinavica. 1970. № 27. P. 24–38.
3. *Belkin V.P.* Quasi-identities of finite rings and lattices // Algebra and Logic. 1979. № 17. P. 171–179. URL: https://doi.org/10.1007/BF01670283.
4. *Clark D.M.* Standard topological algebras: syntactic and principal congruences and profiniteness / D.M. Clark, B.A. Davey, R.S. Freese, M.G. Jackson // Algebra Univ. 2004. № 52. P. 343–376. URL: https://doi.org/10.1007/s00012-004-1917-6.
5. *Kravchenko A.V.* Structure of quasivariety lattices. IV. Nonstandard quasivarieties / A.V. Kravchenko, A.M. Nurakunov, M.V. Schwidefsky // Siberian Mathematical Journal. 2021. № 62. P. 850–858. URL: https://doi.org/10.1134/S0037446621050074.
6. *Arapbay M.A.* Finite lattices generating not finitely-based and nonstandard quasivarieties / M.A. Arapbay, A.O. Basheyeva, S.M. Lutsak // Journal of Mathematics. 2025. URL: https://doi.org/10.1155/jom/1518160.
7. *Lutsak S.M.* Some nonstandard quasivarieties of lattices / S.M. Lutsak, A.O. Basheyeva, A.V. Asanbekov, O.A. Voronina // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2023. № 3. P. 72–80. URL: https://doi.org/10.31489/2023m3/72-80.
8. *Nurakunov A.M.* Profinite Locally Finite Quasivarieties / A.M. Nurakunov, M.V. Schwidefsky // Stud. Logica. 2024, 112, P. 835–859. URL: https://doi.org/10.1007/s11225-023-10077-y
9. *Gorbunov V.A.* Algebraic theory of quasivarieties / V.A. Gorbunov // Consultants Bureau. New York, 1998.