УДК 515.126.8
DOI: 10.36979/1694-500X-2025-25-12-11-18

ИЗУЧЕНИЕ ОБОБЩЁННО СЖИМАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.А. Борубаев, И.З. Абдыкаимов

Аннотация. В категории метрических пространств существует теорема Банаха, которая утверждает существование и единственность неподвижной точки для сжимающего оператора, заданного в полном пространстве. Равномерная структура является обобщением понятия о метрике, причём А.А. Борубаевым показано, как можно использовать идеи Болтянского и Сарымсакова для того, чтобы перенести часть утверждений, имеющих место для метрических пространств, на объекты категории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. При этом используется понятие мультиметрического пространства. Любое равномерное пространство можно ассоциировать с определённой структурой мультиметрического пространства. Это и является основой для осуществлённости осуществлённых и осуществления осуществляемых в данной работе обобщений. Теорема Банаха, известная в функциональном анализе, в данной работе обобщена на случай линейных пространств со структурой, согласованной с равномерностью, заданной на соответствующем носителе. Также рассматривается категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений и естественная категория морфизмов этой категории. В категории морфизмов выделяется проективный предел обратного спектра, составленного из полных равномерно непрерывных отображений, и изучаются некоторые его свойства.

Ключевые слова: мультиметрическое пространство; равномерность; топологическое кольцо; обобщённые сжимающие отображения; полное равномерное пространство; направленность Коши; предел; неподвижная точка; проективный предел; категория морфизмов заданной категории; обратный спектр.

ЖАЛПЫЛАНГАН КЫСУУЧУ ЧАГЫЛДЫРУУНУ ИЗИЛДӨӨ

А.А. Борубаев, И.З. Абдыкаимов

Аннотация. Метрикалык мейкиндиктер категориясында толук мейкиндикте көрсөтүлгөн кысуу оператору үчүн туруктуу чекиттин бар экендигин жана уникалдуулугун ырастаган Банах теоремасы бар. Бир калыпта түзүлүш метрика түшүнүгүнүн жалпылоосу болуп саналат жана А.А. Борубаев Болтянский менен Сарымсаковдун идеяларын метрикалык мейкиндиктер үчүн орун алган айрым билдирүүлөрдү бирдиктүү мейкиндиктер жана бирдей үзгүлтүксүз карталар категориясындагы объекттерге өткөрүү үчүн кантип колдонсо болорун көрсөттү. Бул учурда мультиметриялык мейкиндик түшүнүгү колдонулат. Ар кандай бирдей мейкиндик белгилүү бир мультиметриялык мейкиндик структурасы менен байланыштырылышы мүмкүн. Бул ишке ашырылган жалпылоолорду ишке ашыруу жана бул иште ишке ашыруу учун негиз болуп саналат. Функционалдык анализде белгилүү болгон Банах теоремасы бул эмгекте тиешелүү чөйрөдө берилген бир тектүүлүккө дал келген структурасы бар сызыктуу мейкиндиктердин абалына жалпыланган. Ошондой эле бирдиктүү мейкиндиктердин жана бирдей үзгүлтүксүз картографиялардын категориясы жана бул категориядагы морфизмдердин табигый категориясы каралат. Морфизм категориясында толук бирдей үзгүлтүксүз картографиялардан турган тескери спектрдин проекциялык чеги аныкталат жана анын кээ бир касиеттери изилденет.

Түйүндүү сөздөр: мультиметриялык мейкиндик; бир калыптуулук; топологиялык шакек; жалпыланган кысуучу чагылдыруу; толук бир калыптуу мейкиндик; Коши багыты; чек; туруктуу чекит; проекциялык чек; берилген категориядагы морфизмдердин категориясы; тескери спектр.

CONSIDERING OF GENERALIZED COMPRESSING MAPPING

A.A. Borubaev, I.Z. Abdykaimov

Abstract. In the category of metric spaces, there is Banach's theorem, which asserts the existence and uniqueness of a fixed point for a compressive operator defined in a complete space. In the category of metrical spaces there is proposition, which is called as Banach's theorem. It proposes existing and uniqueness of the fixed point of the compressing operator, acting on the complete metrical space. Uniformed structure is generalization of the idea about metrical space. It has been shown by Borubaev that, how it is possible to use ideas of Boltiansky and Sarymsakov for transbringing some propositions, having place for metrical spaces, to the objects of the category of uniformed spaces and uniformly continuous mappings. In such investigations the concept about multimetrical spaces is used. Uniformed structure can be associated with multimetrical one. It is the basis for having been made of made and being made of being made in this work generalizations. Additionally there are considered the category of uniformed spaces and uniformly continuous mappings and its natural category of its morphisms.. In the category of morphisms, the projective limit of the inverse spectrum composed of complete uniformly continuous maps is distinguished, and some of its properties are studied.

Keywords: multimetric space; uniformity; topological ring; generalized compressive maps; complete uniform space; Cauchy directivity; limit; fixed point; projective limit; category of morphisms of a given category; inverse spectrum.

Пусть дано полное равномерное пространство (X,U), порождённое [1] семейством псевдометрик $\{(X,\rho_i) : i \in I\}$. Пусть оператор $A:(X,U)\to(X,U)$ соответственного пространства есть обобщённо сжимаемый, а именно: для любого $i \in I$ существует такое положительное α_i меньшее 1, что для любого *x* пространства *X* верно, что

$$\rho_i(Ax, Ay) \le \alpha_i \rho_i(x, y). \qquad (1)$$

Пространство R^I, снабжённое естественной равномерностью и естественными покомпонентными операциями сложения и умножения, образует полуполе [2–4] и равномерное пространство.

Как известно [1, 2, 5], на $(R^I,+,\bullet)$ равномерная структура согласована с алгебраической структурой в том смысле, что данное кольцо скаляров имеет свои операции в качестве равномерно непрерывных в отношении естественной равномерности произведения на R^I.

Коэффициент сжатия, взятый из R^I. Направленность, индексируемую натуральными числами, то есть последовательность, представляемую в следующем виде $(A^n b)_{n\in N}$ для некоторого $b \in X$, рассмотрим, причём в качестве оператора *A* рассмотрим сжимающий в смысле (1) оператор. Для любого индекса *i* и произвольного натурального *m* верно, согласно (1), следующее:

$$\rho_i(Ab, A^{m+1}b) = \rho_i(Ab, A(A^m b)) \le \alpha_i \rho_i(b, A^m b).$$

Тогда предположим, что для некоторого натурального *n* выполняется, что

$$\rho_i(A^n b, A^{n+m}b) \le \alpha_i^n \rho_i(b, A^m b). \qquad (1')$$

Отсюда следует, что

$$\rho_i(A^{n+1}b, A^{n+1+m}b) = \rho_i(A(A^n b), A(A^{n+m}b)) \le \alpha_i \rho_i(A^n b, A^{n+m}b) \le \alpha_i \alpha_i^n \rho_i(b, A^m b) = \alpha_i^{n+1} \rho_i(b, A^m b),$$

то есть мы получаем, что

$$\rho_i(A^{n+1}b, A^{n+1+m}b) =\le \alpha_i^{n+1} \rho_i(b, A^m b).$$

По принципу математической индукции из вышедоказанного для произвольного *n*, для которого выполняется $(1')$, получаем, что для любых натуральных чисел *m, n* верно следующее:

$$\rho_i(A^n b, A^{n+m}b) =\le \alpha_i^n \rho_i(b, A^m b). \qquad (2)$$

Однако по определению псевдометрик [1, 3, 5]

$$\rho_i(b, A^m b) \le \rho_i(b, Ab) + \rho_i(Ab, A^m b) \le \rho_i(b, Ab) + \rho_i(Ab, A^2 b) + \rho_i(A^2 b, A^m b) \le \ldots \le$$

$\leq \rho_i(b, Ab) + \rho_i(Ab, A^2b) + ... + \rho_i(A^{m-1}b, A^m b)$.

Тогда из (2) получим, что

$$\rho_i(b, A^m b) \leq \rho_i(b, Ab) + \rho_i(Ab, A^2b) + ... + \rho_i(A^{m-1}b, A^m b) \leq$$

$$\leq \rho_i(b, Ab) + \alpha_i \rho_i(b, Ab) + ... + \alpha_i^{m-1} \rho_i(b, Ab) \leq \frac{\rho_i(b, Ab)}{1-\alpha_i}.$$

Из (2) и из последнего получаем, что

$$\rho_i(A^n b, A^{n+m} b) \leq \alpha_i^n \rho_i(b, A^m b) \leq \alpha_i^n \frac{\rho_i(b, Ab)}{1-\alpha_i}. \quad (3)$$

Но для данного b для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m \in N$, что верно то, что $(n > m) => \alpha_i^n \frac{\rho_i(b, Ab)}{1-\alpha_i} < \varepsilon$. Поэтому, согласно (3) для заданного $b \in X$ для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $k \in N$, что верно то, что $(n > k) => \rho_i(A^n b, A^{n+m} b) < \varepsilon$. Тогда получим, что для заданного $b \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in N$, что верно то, что $(n > k, m \in N) => \rho_i(A^n b, A^{n+m} b) < \varepsilon$. Следовательно, для заданного $b \in X$ верно, что направленность $(A^n b)_{n \in N}$ есть направленность Коши в псевдометрическом пространстве (X, ρ_i) по определению направленности Коши [1, 3, 5, 6]. Ввиду того, что при этом нами рассмотрен произвольный индекс $i \in I$, получаем, что в отношении любого псевдометрического пространства (X, ρ_i), где $i \in I$, верно, что $(A^n b)_{n \in N}$ есть направленность Коши в нём. Тогда по свойствам супремумов [6, 7, 8] верно, что, поскольку *(X,U)* есть супремум равномерностей псевдометрик семейства $\{(X, \rho_i) : i \in I\}$, то из того, что $(A^n b)_{n \in N}$ есть направленность Коши в отношении каждой из равномерностей соответственного семейства, следует, что $(A^n b)_{n \in N}$ есть направленность Коши в их супремуме, то есть в *(X,U)*. Но *(X,U)* полно [1, 2, 6], а значит $(A^n b)_{n \in N}$ имеет предел в нём. Обозначим его как x. Это пригодится нам позже.

Рассмотрим произвольное покрытие канонической базы супремума равномерностей [1, 2, 4, 5, 7] рассматриваемого семейства: $\wedge\{\beta_{i_k}^r : k = 1, ..., n\}$, где $i_k \in I, \beta_{i_k}^r \in U_{i_k}$ для каждого *k=1,...,n*. Здесь $\beta_{i_k}^r = \{O_{x,i_k}^r : x \in X\}, O_{x,i_k}^r = \{y : \rho_{i_k}(x, y) \leq r\}$. Рассмотрим произвольный элемент O_{x,i_k}^r произвольного покрытия $\beta_{i_k}^r$ из набора.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для любых x и y, для которых выполняется то, что $\rho_{i_k}(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_i}$, верно, что $\rho_{i_k}(Ax, Ay) \leq \alpha_{i_k} \rho_{i_k}(x, y) \leq \varepsilon$. По определению равномерно непрерывного отображения [9] это означает, что A равномерно непрерывно. Тогда с точки зрения другого определения равномерной непрерывности [1] для произвольного покрытия $\beta_{i_k}^r$ из указанного выше набора верно, что $A^{-1}(\beta_{i_k}^r) \in U_{i_k}$. Тогда по свойствам равномерных покрытий [1] $A^{-1}(\wedge\{\beta_{i_k}^r : k = 1, ..., n\}) = \wedge\{A^{-1}\beta_{i_k}^r : k = 1, ..., n\}$ есть равномерно. А так как $\wedge\{\beta_{i_k}^r : k = 1, ..., n\}$

является при этом произвольным равномерным покрытием из канонической базы [1, 2] равномерности U, то по свойствам равномерностей и равномерно непрерывных отображений [1, 3, 9] верно, что прообраз при A любого равномерного покрытия есть равномерное покрытие, что означает, что A есть равномерно непрерывный оператор. Тогда A непрерывен по свойствам равномерно непрерывных отображений в отношении индуцированных равномерностью U топологии [1, 2, 4, 5, 7]. Но по вышепоказанному существует точка x, для которой верно то, что $x = \lim((A^n b)_{n\in N})$, тогда ввиду непрерывности A верно, что

$$Ax = A(\lim(A^n b)_{n\in N}) = \lim((A^{n+1} b)_{n\in N}) = \lim((A^n b)_{n\in N}) = x \tag{4}$$

по свойствам непрерывных отображений [1, 4, 7].

Таким образом, согласно (4), нами получено, что существует такая точка x пространства X, что $Ax = x$, то есть доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для сжимающего, в смысле (1), оператора существует неподвижная точка, и при том она у него единственна.

В частности, если для любого $i \in I$ существует такое одно и то же положительное $\alpha_i = \alpha$, меньшее 1, что для любого х пространства X верно, что

$$\rho_i(Ax, Ay) \le a\rho_i(x, y), \tag{5}$$

то аналогично приведённым выше рассуждениям для частного случая, который относится к тому, что для любого $i \in I$ верно, что $\alpha_i = a$, получим, что: если для любого $i \in I$ существует такое одно и то же положительное $\alpha_i = a$, меньшее 1, то существует такая точка х пространства X, что $Ax = x$, и притом – единственная.

Таким образом, в результате произведённых рассуждений понимаем, что оператор A, который является сжимающим в том смысле, что для любых x и y и некоторого $a < 1$ выполняется соотношение (5), имеет единственную неподвижную точку, то есть доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для сжимающего, в смысле (5), отображения существует неподвижная точка и при том – единственная.

Теперь рассмотрим категорию равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений [1, 2, 4, 10] и категорию её морфизмов [1, 4, 8]. Язык теории категорий [8] позволяет универсальным образом изъясняться в отношении объектов математических структур совершенно разной математической природы. В частности, в отношении равномерной топологии теория категорий позволяет рассматривать соответствующие категории [1, 4]. Поэтому возможно выделить в этих категориях понятия, которые относятся к абстрактной теории категорий, и рассмотреть эти понятия в отношении конкретных представлений, которые имеют место именно в теории равномерной топологии. А именно, будет совершена попытка сформулировать, рассмотреть и доказать следующее утверждение. Оно касается абстрактно-категориального понятия проективного предела [8], однако формулируемо в связи с конкретными представлениями, относящимися именно к теории равномерной топологии.

Теорема 3. В категории морфизмов категории равномерных пространств проективный предел обратного спектра, составленного из полных равномерно непрерывных отображений, является полным равномерно непрерывным отображением.

Доказательство. Рассмотрим семейство равномерно непрерывных отображений f_i различных равномерных пространств (X_i, U_i) для $i \in I$ в равномерные пространства (Y_i, V_i), для которого существуют равномерно непрерывные отображения $\alpha_{ij} : (X_j, U_j) \to (X_i, U_i)$ и $\beta_{ij} : (Y_j, V_j) \to (Y_i, V_i)$, связывающие f_i и f_j между собой при помощи композиции для любых $i, j \in I$, для которых $i < j$:

$\beta_{ij} f_j = f_i \alpha_{ij}$, где I – направленное множество. Для любой пары $i, j \in I$, в которой $i < j$, можно интерпретировать отображения f_i и f_j в качестве объектов категории равномерно непрерывных отображений [1, 8], а упорядоченную пару $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ – в качестве морфизма [4, 8], связывающего объект f_i с объектом f_j. Таким образом, мы получаем обратный спектр в отношении категории равномерно непрерывных отображений [8], который составлен из объектов $\{f_i : i \in I\}$ и морфизмов, соответствующих упорядоченным парам из набора $\{(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) : i < j, i, j \in I\}$. Таким образом, для рассматриваемого обратного спектра верно будет то, что для каждой пары индексов $i, j \in I$, для которых *i<j,* верно, что $\beta_{ij} f_j = f_i \alpha_{ij}$.

Пусть отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ является проективным пределом обратного спектра, составленного из набора объектов $\{f_i : i \in I\}$ и набора морфизмов, связывающих соответственные объекты, $\{(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) : i < j, i, j \in I\}$ в отношении категории равномерно непрерывных отображений. Это означает [8], что существует такой набор морфизмов $\{(\phi_i, \psi_i) : i \in I\}$, что для любого $i \in I$ верно следующее соотношение: $f_i \phi_i = \psi_i f$, а для любых $i < j, i, j \in I$ будет верно, что $\phi_i = \alpha_{ij} \phi_j$, $\psi_i = \beta_{ij} \psi_j$, то есть коммутативной является [8] следующая диаграмма для любых $i < j, i, j \in I$ (рисунок 1):

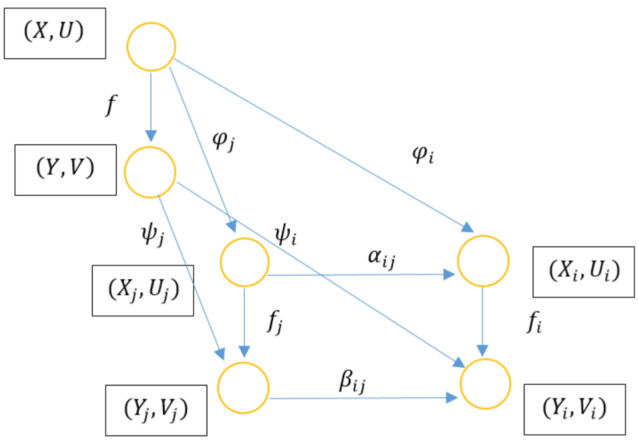

Рисунок 1 – Диаграмма для любых $i < j, i, j \in I$

Рассмотрим случай, когда все отображения из рассматриваемого набора $\{f_i : i \in I\}$ являются полными [1]. Тогда выделим произвольный фильтр Коши $\mathfrak{I}$ пространства *(Y,V),* для которого его образ $f\mathfrak{I}$ сходится. Тогда выделим [1, 2, 5] точку y, к которой сходится $f\mathfrak{I}$. Ввиду непрерывности равномерно непрерывных отображений относительно индуцируемых равномерностями топологий получаем [1, 2, 4, 5, 7], что тогда для любого $i \in I$ фильтр $\psi_i f \mathfrak{I}$ сходится к точке $\psi_i(y)$. Однако, согласно вышеобозначенному, $f_i \phi_i = \psi_i f$, а значит фильтр $f_i \phi_i \mathfrak{I}$ сходится к точке $\psi_i(y)$. Для каждого $i \in I$

при этом верно, что f_i полно согласно рассмотрению, следовательно [1] из того, что $f_i\phi_i\Im$ сходится к точке $\psi_i(y)$ в пространстве (Y_i, V_i) следует, что $\phi_i\Im$ тоже сходится к некоторой точке x_i в пространстве (X_i, U_i).

Итак, для любого $i \in I$ фильтр $\phi_i\Im$ сходится к некоторой точке x_i в пространстве (X_i, U_i). Согласно вышеописанному получаем, что равномерное пространство *(X,U)* в категории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений является проективным пределом [1, 8] обратного спектра, составленного из объектов набора (X_i, U_i) для $i \in I$ и морфизмов из набора $\{\alpha_{ij} : i < j, i, j \in I\}$. Поэтому равномерное пространство *(X,U)* равномерно изоморфно равномерному пространству [1, 4, 8], составленному из всевозможных упорядоченных наборов семейства $\{(x_k)_{k\in I} : (i < j : x_i = \alpha_{ij}(x_j), i, j \in I)\}$ и наделённому наименьшей равномерностью, для которой все отображения канонических проекций семейства $\{\phi_i : i \in I\}$ являются равномерно непрерывными. Поэтому равномерность *U* является супремумом [1, 4, 8] псевдоравномерностей, индуцированных прообразами равномерностей семейства $\{U_i : i \in I\}$, соответственно, при отображениях из семейства $\{\phi_i : i \in I\}$ при соответственных индексах. Однако соответственная псевдоравномерность с базой $\phi_i^{-1}U_i$ является наименьшей псевдоравномерностью [1–5, 7], при которой теоретико-множественное отображение ϕ_i равномерно непрерывно. Поэтому прообраз каждого фильтра *F* Коши пространства (X_i, U_i) имеет в качестве точки прикосновения каждую точку прообраза точки прикосновения фильтра *F*.

Значит для произвольного $i \in I$ и для фильтра $\phi_i\Im$ верно, что $\phi_i^{-1}\phi_i\Im$ также имеет точку прикосновения в псевдоравномерном пространстве $(X, \phi_i^{-1}U_i)$. Так как $\phi_i^{-1}\phi_i\Im \subset \Im$, а у каждого фильтра Коши существует единственный эквивалентный ему минимальный фильтр Коши, то $\phi_i^{-1}\phi_i\Im$ и $\Im$ имеют один и тот же эквивалентный им обоим минимальный фильтр Коши, и поэтому они имеют одинаковые точки прикосновения. Значит, $\Im$ имеет в качестве точки прикосновения каждую точку из прообраза точки x_i при канонической проекции ϕ_i. Тогда точка пространства *X*, равная упорядоченному набору, составленному из соответственных точек $x_i : (x_i)_{i\in I}$, является точкой прикосновения $\Im$ в отношении каждого псевдоравномерного пространства из набора $\{(X, \phi_i^{-1}U_i) : i \in I\}$. Поскольку супремум пространств набора $\{(X, \phi_i^{-1}U_i) : i \in I\}$ является пространством *(X,U),* а точка, являющаяся точкой прикосновения некоторого фильтра в каждом пространстве некоторого набора, является [1, 2, 4] точкой прикосновения этого фильтра в супремуме пространств этого набора, то из вышеуказанного получаем, что $(x_i)_{i\in I}$ является точкой прикосновения фильтра $\Im$ пространства *(X,U)*. Значит для произвольного фильтра Коши $\Im$ пространства *(Y,V),* для которого его образ $f\Im$ сходится, оказалось, что $\Im$ тоже сходится. Следовательно, по определению [1] полного отображения *f* является полным.

Пусть для каждого $i \in I$ фильтр $\phi_i\Im$ сходится к некоторому значению y_i. Тогда рассмотрим произвольную точку x_i из прообраза точки y_i. Выделим произвольное покрытие α из $\phi_i^{-1}U_i$. Выделим произвольное множество F' семейства $\phi_i^{-1}\phi_i\Im$. Для F' есть $F \in \Im$, для которого $F' = \phi_i^{-1}\phi_i F$.

Очевидно [1–5, 7], $\phi_i F$ имеет непустое пересечение с некоторым $A \in \phi_i \alpha$, для которого $y_i \in A$. Тогда $\phi_i^{-1}\phi_i F$ имеет непустое пересечение с $\phi_i^{-1}A$. Но $\alpha \in \phi_i^{-1}U_i$ означает, что существует $\beta \in U_i : \alpha = \phi_i^{-1}\beta_i$. $\phi_i\alpha \in \phi_i\phi_i^{-1}U_i = U_i$, если ϕ_i сюръективно. Значит $\phi_i^{-1}A \in \phi_i^{-1}\phi_i\alpha = \phi_i^{-1}\phi_i\phi_i^{-1}\beta_i = \phi_i^{-1}\beta_i = \alpha$, если ϕ_i сюръективно. Поэтому $\phi_i^{-1}\phi_i F$ имеет непустое пересечение с $\phi_i^{-1}A \in \alpha$. Но $y_i \in A \Rightarrow x_i \in \phi_i^{-1}A$.

Итак, произвольное F' семейства $\phi_i^{-1}\phi_i \mathfrak{I}$ имеет непустое пересечение с некоторым множеством покрытия α, содержащим x_i. Поэтому получаем, что из произвольности рассмотрения α из $\phi_i^{-1}U_i$ каждое множество F' семейства $\phi_i^{-1}\phi_i \mathfrak{I}$ пересекается некоторым множеством покрытия α, содержащим прообраз y_i. Значит [1–3, 5], фильтр с базой $\phi_i^{-1}\phi_i \mathfrak{I}$ имеет в качестве точки прикосновения в пространстве $(X, \phi_i^{-1}U_i)$ каждую точку прообраза y_i. Поэтому, ввиду произвольности рассмотрения $i \in I$, получаем, что для любого $i \in I$ фильтр с базой $\phi_i^{-1}\phi_i \mathfrak{I}$ имеет в качестве точки прикосновения в пространстве $(X, \phi_i^{-1}U_i)$ каждую точку прообраза соответственной точки y_i.

Так же, как это указано выше, будем иметь в виду, что в псевдоравномерном пространстве, как и в равномерном пространстве [1, 2, 4–6] для каждого фильтра Коши есть единственный эквивалентный ему минимальный фильтр Коши, а эквивалентные фильтры Коши имеют одни и те же точки прикосновения. При этом также полагаем, что содержать некоторый минимальный фильтр Коши и быть эквивалентным ему для любого фильтра Коши псевдоравномерного пространства есть одно и то же, как и для фильтров Коши равномерного пространства [1–4, 10, 11]. Таким образом, утверждение, в отношении которого мы ведём доказательство его верности, является нами только что доказанным.

Заключение. Для теоремы Банаха существуют обобщения на случай рассмотрения мультиметрических пространств [12]. При этом, поскольку [1, 2, 4, 5] отделимая равномерность может быть интерпретирована в качестве семейства псевдометрик, различающего точки, а структуру, определяемую в форме такого различающего точки семейства псевдометрик, можно представить в форме мультиметрики [12], то теорема Банаха обобщаема на случай отделимых равномерных пространств. А именно: в равномерном пространстве оператор, являющийся сжимающим в смысле сжимания по всем компонентам семейства метрик, задающего соответствующую равномерность, имеет неподвижную точку при полноте соответственного пространства. Соответствующий оператор является сжимающим в отношении существования элемента полуполя значений мультиметрики [12], имеющего только компоненты, меньшие 1, и производящего образ при данной мультиметрике произвольной пары точек элементом того же полуполя только с компонентами, превосходящими соответствующие компоненты элемента, являющегося образом при отображении мультиметрикой [12] для пары, составленной из образов соответствующих точек рассматриваемой пары, получаемых отображением этих точек соответственно рассматриваемым оператором. Рассматриваема была категория морфизмов [8] в отношении категории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений [1]. Изучаемы были некоторые свойства проективного предела обратного спектра [1, 8] внутри этой категории, составленного из полных равномерно непрерывных отображений.

Поступила: 17.11.2025; рецензирована: 01.12.2025; принята: 03.12.2025.

Литература

1. *Borubaev A.A.* Uniformed topology and its applications. Бишкек: Илим, 2021. 334 с.
2. *Engelking R.* General topology. М.: Мир, 1986. 752 с.

3. *Федорчук В.В.* Общая топология. Основные конструкции / В.В. Федорчук, В.В. Филиппов. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.
4. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. М.: Наука, 1977. 368 с.
5. *Burbaki N.* General topology. М.: Наука, 1968. 275 с.
6. *Diedonnë J.* Sur les espaces uniformes complets // Paris, Ann. Sci. Ecole norm. Super, 56, 1939. P. 227–291.
7. *Архангельский А.В.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях / А.В. Архангельский, В.И. Пономарёв. М.: Наука, 1974. 424 с.
8. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики / Р. Голдблатт; пер. с англ. М.: Мир, 1983. 488 с.
9. *Fro1ik Z.* On approximation and uniform approximation of spaces. Tokyo, Proc. Jap. Acad., 37, 1961, р. 530–532.
10. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorial topology of compact Hausdorff spaces. Michigan, Lviv: VNTL Publ., 1999, 263 p.
11. *Fro1ik Z.* Applications of complete families of continuous functions to the theory of Q-spaces. Czechosl., Math. J., 11, 1961, 115–133 p.
12. *Кутателадзе С.С.* Основы функционального анализа / С.С. Кутателадзе. Новосибирск: Наука, 1983. 213 с.