УДК 517.988.38+532.511:517.972
DOI: 10.36979/1694-500X-2025-25-8-11-17

ЭКСТРЕМУМЫ, УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА И СТАРИННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ

С.К. Кыдыралиев, Н.В. Мокроусов, О.В. Бережная

Аннотация. Рассмотрена задача на нахождение экстремума функции двух переменных, а также задачи на относительный максимум и минимум функции Кобба–Дугласа, приведено решение обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа методом «Цепочка». У всех этих задач есть общее место: в процессе решения приходится иметь дело с системой алгебраических уравнений. В настоящее время такие системы обычно решают, используя переход к квадратным уравнениям. Показано, что использование метода, основанного на идее математиков древности, таких как Диофант, позволяет упростить и сделать короче процесс решения.

Ключевые слова: экстремумы функций двух переменных; функция Кобба–Дугласа; линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; уравнения Эйлера–Лагранжа; формула разности квадратов; решение систем алгебраических уравнений.

ЭКСТРЕМУМДАР, ЭЙЛЕР-ЛАГРАНЖДЫН ТЕҢДЕМЕЛЕРИ ЖАНА СИСТЕМДЕРИН ЧЫГАРУУНУН БАЙЫРКЫ ЫКМАСЫ

С.К. Кыдыралиев, Н.В. Мокроусов, О.В. Бережная

Аннотация. Бул макалада эки өзгөрмөлүү функциянын экстремумун табуу маселесин, Кобб–Дуглас функциясынын салыштырмалуу максимум жана минимум маселелерин жана Эйлер–Лагранж кадимки дифференциал теңдемелерин «Чынжыр» ыкмасы аркылуу чыгарууну карайбыз. Бул маселелердин бардыгынын бир жалпылыгы бар: чечүү процессинде биз алгебралык теңдемелердин системин чыгарабыз. Азыркы учурда мындай системдер көбүнчө квадраттык теңдемелерге өтүүнүн жардамы менен чечилет. Бул макалада көрсөтүлгөн, Диофант сыяктуу байыркы математиктердин идеясына негизделген, ыкманы колдонуу бизге чечүү процессин жөнөкөйлөтүүгө жана кыскартууга мүмкүндүк берет.

Түйндүү сөздөр: эки өзгөрмөлүү функциялардын экстремумдары; Кобб–Дуглас функциясы; сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелер; Эйлер–Лагранж теңдемелери; квадраттардын айырмасынын формуласы; алгебралык теңдемелердин системдерин чыгаруу.

EXTREMES, EULER-LAGRANGE EQUATIONS AND AN OLD METHOD FOR SOLVING SYSTEMS

S.K. Kydyraliev, N.V. Mokrousov, O.V. Berezhnaya

Abstract. The article considers the problem of finding the extremums of a function of two variables, problems of the relative maximum and minimum of the Cobb–Douglas function, and the solution of ordinary differential equations of the Euler–Lagrange by «Chain» method. All these problems have a common place: in the process of solving, one has to deal with a system of algebraic equations. Nowdays, such systems are usually solved using a transition to quadratic equations. It is shown that using a method based on the idea of ancient mathematicians such as Diophantus makes it possible to simplify and shorten the solution process.

Keywords: extremes of functions of two variables; Cobb–Douglas function; linear ordinary differential equations; Euler–Lagrange equations; formula for the difference of squares; solution of systems of algebraic equations.

В предыдущих работах был показан метод решения некоторых систем алгебраических уравнений, который позволяет успешно справляться с задачами школьного уровня, которые в наше время требуют привлечения аппарата квадратичных уравнений [1]. Этот метод основывается на формуле разности квадратов и применялся великими математиками древности, такими как Диофант, Аль-Хорезми и многими другими. В данной работе мы используем этот метод для решения задач, которые обычно рассматриваются в курсе высшей математики.

Начнем с нахождения экстремумов.

Задача 1

Найти экстремумы функции: $z = x^3 + 3xy^2 – 15x – 12y + 1.$

Решение

Следуем стандартному алгоритму.

Шаг 1. Процесс нахождения критических точек – т. е. только тех точек, в которых могут быть экстремумы, начинают с вычисления частных производных:

$z_x = 3x^2 + 3y^2 – 15$; $z_y = 6xy – 12$.

Шаг 2. Критические точки являются решениями системы уравнений, определяемой равенством нулю частных производных: $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$ Для ее решения рассмотрим более общую систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 4. \end{cases}$ Введем обозначения $x^2 = 2.5 - z;\ y^2 = 2.5 + z$. Тогда, $x^2y^2 = 4 = (2.5 - z)(2.5 + z)$. Отсюда, $4 = 6.25 - z^2 \Rightarrow z^2 = 2.25 \Rightarrow z = \pm 1.5$. Таким образом, $x = \pm 1;\ y = \pm 2$ и $x = \pm 2;\ y = \pm 1$. Возвращаясь к исходной системе, получаем 4 критические точки: (1; 2), (–1; –2), (–2; –1) и (2; 1).

Далее определяем характер критических точек.

Шаг 3. Находим частные производные второго порядка:

$z_{xx} = 6x$; $z_{xy} = 6y$;

$z_{yx} = 6y$; $z_{yy} = 6x$.

Шаг 4. Составим функцию $D(x; y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$ и определим ее значения в критических точках:

$D(1; 2) = D(-1; -2) < 0$ – эти точки является седловыми;

$D(2;\ 1) = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0$ – в этой точке локальный минимум,

потому что $z_{xx} > 0;$

$– D(-2; - 1) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0$ – в этой точке локальный максимум,

потому что $z_{xx} < 0.$

Шаг 5. Подставляя координаты точки минимума, найдем, что минимум функции: $z_{min} = z(2; 1) = –27;$ максимум функции: $z_{max} = z(–2; –1) = 29.$

Одними из популярных задач, рассматриваемых в курсе микроэкономики, являются задачи на нахождение экстремальных значений, определяемых функцией Кобба–Дугласа: $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$, где Q –

количество произведенной продукции при использовании L единиц труда и K единиц капитала. Для того чтобы решать такие задачи обычно используется метод Лагранжа [2].

Задача 2

Производственная функция фирмы имеет вид $Q = 60L^{0.6}K^{0.6}$, где L – число единиц труда; K – капитала. Определить, сколько единиц труда и капитала нужно использовать для того, чтобы максимизировать выпуск продукции, затратив $28800, при цене единицы труда $25, единицы капитала $64.

Решение (стандартное)

Итак, требуется максимизировать функцию Q при условии $25L + 64K = 28800$. Для этого составим функцию Лагранжа: $F(L, K, m) = 60L^{0.6}K^{0.6} - m(25L + 64K - 28800)$, вычислим частные производные: $F_L = 36L^{-0.4}K^{0.6} - m25$; $F_L = 36K^{-0.4}L^{0.6} - m64$; $F_m = -(25L + 64K - 28800)$ и составим соответствующую систему:

$$\begin{cases} 36L^{-0.4}K^{0.6} = m25, \\ 36L^{0.6}K^{-0.4} = m64, \\ 25L + 64K = 28800. \end{cases}$$

Для того чтобы решить эту систему, поделим 1-е уравнение системы на 2-е:

$$\frac{36L^{-0.4}K^{0.6}}{36L^{0.6}K^{-0.4}} = \frac{m25}{m64} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{25}{64}.$$

Отсюда, $25L = 64K$, и подставив в 3-е уравнение системы, получим:

$$25L + 64K = 28800 \Rightarrow 50L = 28800 \Rightarrow L = 576 \Rightarrow K = 225.$$

Отсюда получаем, что для того чтобы максимизировать выпуск продукции, нужно использовать 576 единиц труда и 225 единиц капитала.

Оказывается, что в случае равенства показателей степени α и β, функции Кобба–Дугласа $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$, процесс решения может быть значительно упрощен. Продемонстрируем его, рассмотрев только что решенную задачу.

Решение (новый способ, для случая $\alpha = \beta$).

Итак, требуется максимизировать функцию $Q = 60L^{0.6}K^{0.6}$ при условии $25L + 64K = 28800$. Для этого введем обозначения: $25L = 28800 / 2 - z = 14400 - z$ и $64K = 14400 + z$. Тогда функция $25L \cdot 64K = (14400 - z)(14400 - z) = 14400^2 - z^2$ будет иметь максимальное значение при $z = 0$, то есть при $25L = 64K = 14400 \Rightarrow L = 576;\ K = 225.$ Понятно, что при этих же значениях K и L будут иметь максимальное значение и функции LK и $Q = 60L^{0.6}K^{0.6}$.

Осталось убедится в том, что ответ совпадает с полученным ранее.

Решим предложенным способом другую задачу на функцию Кобба–Дугласа.

Задача 3

Производственная функция фирмы имеет вид $Q = 225L^{0.4}K^{0.4}$, где L – число единиц труда; K – капитала. Минимизируйте издержки на производство 2025 единиц товара, зная, что цена единицы труда $4, а цена единицы капитала $108.

Решение

Требуется найти минимум функции $C = 4L + 108K$ при условии $225L^{0.4}K^{0.4} = 2025$. Обозначим значение минимума через $8P$, сократим равенства и получим систему: $\begin{cases} L^{0.4}K^{0.4} = 9, \\ L + 27K = 2P. \end{cases}$ Для решения системы введем обозначения: $L = P - z$ и $27K = P + z$. Тогда, из 1-го уравнения системы получим:

$$\left[(P - z)\frac{P + z}{27}\right]^{0.4} = 9 => (P - z)(P + z) = 27 \cdot 243 =>$$

$$P^2 - z^2 = 27 \cdot 243 => P^2 = 81^2 + z^2.$$

Отсюда следует, что минимум затрат получается при $z = 0$ и составляет $8P = 8 \cdot 81 = 648$. При этом, нужно использовать $L = P - z = 81$ единиц труда и $K = \frac{P + z}{27} = \frac{81}{27} = 3$ единицы капитала.

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами – это уравнение:

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1}$$

где a, b – числа; $f(x)$ – заданная функция [3–7].

Теорема

1) Уравнение (1) можно разложить в цепочку: $y' + py = z(x),\ z' + qz = f(x)$, где p, q являются решением системы $\begin{cases} p + q = a, \\ pq = b. \end{cases}$;

2) Уравнение $y' + my = g(x)$ можно записать в виде $\left(ye^{mx}\right)' e^{-mx} = g(x)$.

Доказательство

1) Подставив значение $z(x)$ из 1-го уравнения системы во 2-е, получим:

$$[y'' + py'] + q[y' + py] = f(x).$$

Теперь приравняем коэффициенты уравнения к соответствующим в уравнении (1) и убедимся в справедливости утверждения 1-й теоремы.

2) Для доказательства нужно взять производную от произведения ye^{mx} и умножить результат на e^{-mx}.

Задача 4

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$y'' + 8y' + 15y = 8e^{-3x}, \tag{2}$$

составим и решим систему:

$$\begin{cases} p + q = 8, \\ pq = 15. \end{cases}$$

Для этого положим $p = 4 - r;\ q = 4 + r$. Тогда $15 = pq = (4 - r)(4 + r) = 16 - r^2$. Отсюда, $r^2 = 1 => \ p = 4 - 1 = 3;\ q = 4 + 1 = 5$. Следовательно, исходное уравнение равносильно цепочке $y' + 3y = z(x)$; $z' + 5z = 8e^{-3x}$. Решим уравнение:

$$z' + 5z = 8e^{-3x} => \left(ze^{5x}\right)' e^{-5x} = 8e^{-3x} => \left(ze^{5x}\right)' = 8e^{2x} => ze^{5x} = 4e^{2x} + C$$

и воспользуемся полученным решением: $y' + 3y = \left(4e^{2x} + C\right)e^{-5x}$.

Тогда $\left(ye^{3x}\right)' e^{-3x} = 4e^{-3x} + Ce^{-5x} => y = 4xe^{-3x} + C_1e^{-3x} + C_2e^{-5x}$,

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Уравнением Эйлера–Лагранжа называется обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$(kx + l)^2 y'' + a(kx + l)y' + by = f(x), \tag{3}$$

где $k,\ l,\ a,\ b$ – числа; $f(x)$ – заданная функция.

Теорема

1) Уравнение Лагранжа–Эйлера можно разложить в цепочку

$$(kx + l)y' + py = z(x),$$
$$(kx + l)z' + qz = f(x),$$

где $p,\ q$ являются решением системы: $\begin{cases} k + p + q = a, \\ pq = b. \end{cases}$

2) Уравнение $(kx + l)y' + my = g(x)$ можно записать в виде

$$k\left[\left(x + \frac{l}{k}\right)^{m/k} y\right]' \left(x + \frac{l}{k}\right)^{1-m/k} = g(x).$$

Доказательство

1) Подставив значение $z(x)$ из 1-го уравнения системы во 2-е, получим:

$$(kx + l)[ky' + (kx + l)y'' + py'] + q[(kx + l)y' + py] = f(x).$$

Теперь перепишем полученное уравнение:

$$(kx + l)^2 y'' + [k + p + q](kx + l)y' + pqy = f(x),$$

и, приравняв коэффициенты уравнения к соответствующим в уравнении (3), убедимся в справедливости утверждения 1-й теоремы.

2) Для доказательства нужно взять производную от произведения и раскрыть скобки.

Задача 5

Проинтегрируем уравнение:

$$3(2x - 3)^2 y'' + 11(2x - 3)y' - 2y = 18.$$

Для начала запишем уравнение в стандартном виде:

$$\left(2x-3\right)^2 y'' + \frac{11}{3}\left(2x-3\right)y' - \frac{2}{3}y = 6\,. \tag{4}$$

Для того чтобы представить уравнение (4) в виде «цепочки», решим систему:

$$\begin{cases} 2+p+q=\dfrac{11}{3}, \\ \quad pq=-\dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+q=\dfrac{5}{3}, \\ \; pq=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Для этого положим $p=\frac{5}{6}-r;\ q=\frac{5}{6}+r$. Тогда, $\frac{-2}{3}=pq=\left(\frac{5}{6}-r\right)\left(\frac{5}{6}+r\right)=\frac{25}{36}-r^2$. Отсюда, $r^2=\frac{49}{36} \Rightarrow\ p=\frac{-1}{3};\ q=2$. Это решение, в силу теоремы, позволяет представить уравнение в виде цепочки $\left(2x-3\right)y'-\frac{1}{3}y=z(x),\ \left(2x-3\right)z'+2z=6$. Перепишем уравнение $\left(2x-3\right)z'+2z=6$ в виде $\left[\left(2x-3\right)z\right]'=6$. Отсюда, $\left(2x-3\right)z=6x+C$. Поэтому уравнение $\left(2x-3\right)y'-\frac{1}{3}y=z(x)$ принимает вид: $\left(2x-3\right)^{7/6}\left[y\left(2x-3\right)^{-1/6}\right]'=3+\frac{C}{2x-3}$.

Тогда

$$\left[y\left(2x-3\right)^{-1/6}\right]'=3\left(2x-3\right)^{-7/6}+C\left(2x-3\right)^{-13/6} \Rightarrow$$

$$y\left(2x-3\right)^{-1/6}=-9\left(2x-3\right)^{-1/6}+C_1\left(2x-3\right)^{-7/6}+C_2.$$

Ответ: Общим решением уравнения является функция

$$y\left(x\right)=-9+C_1\left(2x-3\right)^{-1}+C_2\left(2x-3\right)^{1/6}.$$

Классический подход к решениям линейных уравнений 2-го порядка предполагает три разных подхода к их решению, в зависимости от вида характеристических значений. В отличие от него, разложение в цепочку позволяет использовать единый подход. Для подтверждения этой мысли, приведем следующий пример.

Задача 6

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$\left(5x+1\right)^2 y'' - \left(5x+1\right)y' + 9y = 25\left(x+0.2\right)^{0.4},$$

запишем систему:

$$\begin{cases} 5+p+q=-1, \\ \quad pq=9. \end{cases}$$

Для решения системы

$$\begin{cases} p+q=-6, \\ \; pq=9, \end{cases}$$

положим: $p = -3 - r;\ q = -3 + r$. Тогда, $9 = pq = (-3 - r)(-3 + r) = 9 - r^2$. Отсюда, $r^2 = 0 => p = q = -3$. Это решение, в силу теоремы, позволяет представить уравнение в виде цепочки: $(5x + 1)\,y' - 3y = z(x),\quad (5x + 1)\,z' - 3z = 25\,(x + 0.2)^{0.4}$.

Перепишем уравнение $(5x + 1)\,z' - 3z = 25\,(x + 0.2)^{0.4}$ в виде

$$5\,(x + 0.2)^{0.4}\left[z\,(x + 0.2)^{0.6}\right]' = 25\,(x + 0.2)^{0.4}.$$

Отсюда, $\left[z\,(x + 0.2)^{0.6}\right]' = 5 => z\,(x + 0.2)^{0.6} = 5\,(x + 0.2) + C$. Поэтому уравнение $(5x + 1)\,y' - 3y = z(x)$ принимает вид:

$$5\,(x + 0.2)^{0.4}\left[y\,(x + 0.2)^{0.6}\right]' = 5\,(x + 0.2)^{0.4} + C\,(x + 0.2)^{-0.6}.$$

Тогда

$$\left[y\,(x + 0.2)^{0.6}\right]' = 1 + C\,(x + 0.2)^{-1}\ /\ 5 => y\,(x + 0.2)^{0.6} = (x + 0.2) + C_1 ln|x + 0.2| + C_2.$$

Ответ: Общим решением уравнения является функция

$$y = (x + 0.2)^{0.4} + [C_1 ln|x + 0.2| + C_2]\,(x + 0.2)^{-0.6}.$$

Заключение. Было бы странно отрицать, что формула, позволяющая вычислять корни квадратного уравнения через дискриминант, была значительным шагом в развитии математики. Но, как иногда бывает, «вместе с водой выплеснули и ребенка». Был почти забыт метод, пользуясь которым математики древнего Вавилона, Египта, Китая, Греции, а также выдающиеся математики Средних веков успешно решали многие задачи, которые нынче решаются с помощью квадратных уравнений [3–7]. В данной работе на нескольких примерах показано, как метод, использующий только формулу разности квадратов, позволяет успешно справиться с задачами, которые обычно относят к курсу высшей математики.

Поступила: 16.06.2025; рецензирована: 30.06.2025; принята: 02.07.2025.

Литература

1. *Кыдыралиев С.К.* Еще раз про разность квадратов / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, С.Н. Джапарова // Вестник КРСУ. 2024. Т. 24. № 4. С. 4–9.
2. *Байе М.Р.* Управленческая экономика и стратегия бизнеса / М.Р. Байе. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. 743 с.
3. *Кыдыралиев С.К.* Еще раз про разность квадратов / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2024. Т. 24. № 8. С. 4–9 с.
4. *Kydyraliev S.K.* Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // The College Mathematics Journal, USA. 1996. Vol. 27. № 3. С. 199–204.
5. *Кыдыралиев С.К.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: БГИЭиК, 2000. 100 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: URSS, 2018. 336 с.
7. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М.: URSS. 2016. 512 с.