УДК 511.1
DOI: 10.36979/1694-500X-2025-25-8-4-10

# ПОСТРОЕНИЕ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ МЕТОДОМ kg

***С.К. Кыдыралиев, Н.В. Мокроусов, О.В. Бережная***

*Аннотация.* История математики знает много примеров красивых и очень важных утверждений. Так, теорема Пифагора породила своеобразную революцию фактом того, что невозможно выразить в рациональных числах длину гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами. Веками волновала умы Великая теорема Ферма. В ряду таких проблем достойное место занимает задача построения магических квадратов. Квадратная таблица, у которой сумма чисел, стоящих в каждом столбце, каждой строке и на обеих диагоналях, всегда одна и та же, называется магическим квадратом. История магических квадратов насчитывает несколько тысячелетий. В данной работе рассматривается новый метод построения магических квадратов нечетного порядка. Его отличительной особенностью является то, что каждый квадрат более высокого порядка строится на магическом квадрате предыдущего порядка.

*Ключевые слова:* знаменитые математические проблемы; магические квадраты; члены арифметической прогрессии; квадраты нечетных порядков; итерационный процесс; новый метод построения.

# СЫЙКЫРДУУ КВАДРАТТАРДЫ ТҮЗҮҮНҮН KG ЫКМАСЫ

***С.К. Кыдыралиев, Н.В. Мокроусов, О.В. Бережная***

*Аннотация.* Математиканын тарыхы кооз жана абдан маанилүү көптөгөн мисалдарды билет. Пифагор теоремасы бирдик катеттүү үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугун рационалдуу сандар менен көрсөтүү мүмкүн эместигин далилдеп, кандайдыр бир төңкөрүштү жараткан. Ферманын Улуу Теоремасы кылымдар бою акыл-эсти толкундантып келет. Мындай проблемалардын арасында сыйкырдуу аянтчаларды түзүү маселеси татыктуу орунду ээлейт. Ар бир жолчо, мамыча жана эки диагоналдагы сандардын суммасы дайыма бирдей болгон квадраттык таблица сыйкырдуу квадрат деп аталат. Мындай квадраттардын тарыхы бир нече миң жылдыкты камтыйт. Бул макалада биз так тартиптеги сыйкырдуу квадраттарды түзүүнүн жаңы ыкмасын талкуулайбыз. Анын өзгөчөлүгү — жогорку тартиптеги ар бир квадрат мурунку тартиптеги сыйкырдуу квадратты камтыйт.

*Түйүндүү сөздөр:* белгилүү математика маселелери; сыйкырдуу квадраттар; арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү; так тартиптеги квадраттар; итеративдик процесс; түзүүнүн жаңы ыкмасы.

# CONSTRUCTION OF MAGIC SQUARES BY THE KG METHOD

***S.K. Kydyraliev, N.V. Mokrousov, O.V. Berezhnaya***

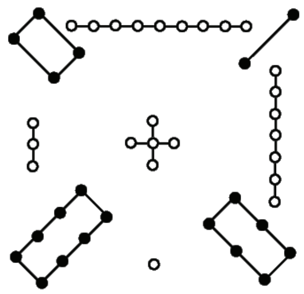
*Abstract.* The history of mathematics knows many examples of beautiful and very important statements. Thus, the Pythagorean theorem gave birth to a kind of revolution, the fact that it is impossible to express in rational numbers the length of the hypotenuse of a right triangle with unit legs. Fermat's Great Theorem has excited minds for centuries. Among such problems, the task of constructing magic squares occupies a worthy place. A square table in which the sum of the numbers in each column, each row and on both diagonals is always the same is called a magic square. The history of magic squares goes back several millennia. In this paper, we discuss a new method for constructing odd-order magic squares. Its distinctive feature is that each square of a higher order is constructed on a magic square of the previous order.

*Keywords:* famous mathematical problems; magic squares; arithmetic progression members; odd-order squares; iterative process; new construction method.

**Введение.** Одному из первых упоминаний в литературе о магических квадратах уже более четырех тысяч лет. О них великий математик Пьер Ферма сказал, что не знает в математике ничего более прекрасного. Как это не удивительно, но эти слова Ферма не относятся к Великой Теореме. Работая над ними, не менее великий Леонард Эйлер изобрел ***судоку*** – игру, в которую играют миллионы человек во всем мире. Одна из них была предметом особой гордости Бенджамина Франклина – одного из основателей США, портрет которого украшает купюру $100. Другая – является наиболее обсуждаемым фрагментом картины знаменитого художника А. Дюрера «Меланхолия». Конечно, можно продолжать эти подсказки, но, пожалуй, стоит остановиться, поскольку многие давно уже поняли, что речь идет о магических квадратах [1–6].

Магический квадрат – это квадратная числовая таблица, у которой сумма чисел в каждом столбце, а также в каждой строке и еще на обеих главных диагоналях, всегда одна и та же.

Возможно, самым известным магическим квадратом является древнекитайская таблица Ло Шу (2200 лет до нашей эры) [6]:



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

В этой таблице сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали равна 15.

**Теорема**

1) Если к каждому элементу магического квадрата прибавить одно и то же число, то получится магический квадрат.

2) Если каждый элемент магического квадрата умножить на одно и то же число, то получится магический квадрат.

Доказательство этой теоремы является совсем простым делом. Для построения иллюстрирующего примера возьмем таблицу Ло Шу с множителем 3 и слагаемым (–17):

| | | |
|---|---|---|
| $4\cdot3 - 17 = -5$ | $9\cdot3 - 17 = 10$ | $2\cdot3 - 17 = -11$ |
| $3\cdot3 - 17 = -8$ | $5\cdot3 - 17 = -2$ | $7\cdot3 - 17 = 4$ |
| $8\cdot3 - 17 = 7$ | $1\cdot3 - 17 = -14$ | $6\cdot3 - 17 = 1$ |

Легко убедиться, что получилась таблица с магической константой –6.

**Примечание 1.** В результате использования этой теоремы таблица Ло Шу преобразовалась в магическую таблицу, элементами которой являются члены арифметической прогрессии.

**Примечание 2.** Магические квадраты можно рассматривать как семейство квадратных числовых матриц. Для них имеют место типичные свойства: сумма и разность таких матриц одинакового порядка принадлежат этому семейству, произведение такой матрицы и любого числа принадлежат этому семейству. В результате транспонирования такой матрицы получается матрица из этого семейства.

Магические квадраты строились и изучались большим количеством людей на протяжении многих тысячелетий. Поэтому существует множество различных способов построения таких таблиц [4–6]. Как правило, все эти способы для процесса построения определенного магического квадрата включают в себя полный цикл: берется пустая таблица требуемого размера и заполняется числами, следуя определенному правилу.

Предлагаемый нами метод, в отличие от таких, является рекуррентным: на магический квадрат 3-го порядка «надстраивается» магический квадрат 5-го порядка, далее, на него «надстраивается» магический квадрат 7-го порядка и так далее.

Для того чтобы аккуратно изложить предлагаемый метод, удобно использовать алгебраический подход – использовать символическую запись.

Используем таблицу Ло Шу. На основе сказанного выше, да и в результате прямой проверки, можно увидеть, что таблица

| | | |
|---|---|---|
| a+4k | a+9k | a+2k |
| a+3k | a+5k | a+7k |
| a+8k | a+1k | a+6k |

является магическим квадратом при любых значениях *a* и *k*. Если от всех элементов этой таблицы вычесть *a+5k*, то получится таблица с магическим числом *0*:

| | | |
|---|---|---|
| –k | 4k | –3k |
| –2k | 0 | 2k |
| 3k | –4k | k |

Эта таблица помогает сделать качественный переход: резко увеличить число построенных магических квадратов. Для этого, давайте заменим элемент *3k* на *g*. Тогда получится таблица:

| | | |
|---|---|---|
| –k | k+g | –g |
| k–g | 0 | –k+g |
| g | –k–g | k |

Понятно, что она является магической. Более того, становится понятно, что для построения магического квадрата можно взять любые три числа с суммой нуль, например, *–11+14–3=0*, и вписать их в 1-ю строку таблицы:

| | | |
|---|---|---|
| –11 | 14 | –3 |
| | 0 | |
| | | |

За счет симметрии относительно *0*, сразу заполняется 3-я строка:

| | | |
|---|---|---|
| –11 | 14 | –3 |
| | 0 | |
| 3 | –14 | 11 |

После этого, с учетом магического числа *0*, заполняются оставшиеся ячейки:

| | | |
|---|---|---|
| –11 | 14 | –3 |
| 8 | 0 | –8 |
| 3 | –14 | 11 |

Далее, к построенным таким образом магическим квадратам можно применять Теорему и всячески их изменять, умножая их элементы на какой-нибудь множитель или добавляя/вычитая числа.

Единственное, за чем нужно проследить: нужно выбирать $k$ и $g$ так, чтобы их линейные комбинации не принимали одинаковые числовые значения. Например, если

| | | |
|---|---|---|
| –2 | 6 | –4 |
| | 0 | |
| | | |

то получится

| | | |
|---|---|---|
| –2 | 6 | –4 |
| | 0 | |
| 4 | –6 | 2 |

После этого нужно вписать числа *2* и *–2*, но по правилам магические квадраты не должны иметь одинаковые элементы.

На следующем этапе займемся таблицей 5-го порядка. Как уже было сказано, она будет строиться на базе таблицы 3-го порядка. Видимо, вполне естественно, продлить диагонали:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –2k | | | | –2g |
| | –k | k+g | –g | |
| | k–g | 0 | –k+g | |
| | g | –k–g | k | |
| 2g | | | | 2k |

Далее, как и в случае 3-го порядка, можно уравновесить крайние элементы средним элементом 1-й строки. Но тогда два оставшихся в 1-й строке элемента должны отличаться только знаком, и такие же числа, в силу симметрии, должны появиться в 5-й строке, что недопустимо:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –2k | f | 2k+2g | –f | –2g |
| | –k | k+g | –g | |
| | k–g | 0 | –k+g | |
| | g | –k–g | k | |
| 2g | –f | | f | 2k |

Поэтому поступим по-другому: приравняем крайние элементы к среднему, и уравновесим их оставшимися элементами 1-й строки:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –2k | k+3g | –2k-2g | 3k+g | –2g |
| | –k | k+g | –g | |
| | k-g | 0 | –k+g | |
| | g | –k-g | k | |
| 2g | –k-3g | 2k+2g | –3k-g | 2k |

Осталось заполнить оставшиеся ячейки, придерживаясь симметрии:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –2k | k+3g | –2k-2g | 3k+g | –2g |
| 3k-g | –k | k+g | –g | –3k+g |
| –2k+2g | k-g | 0 | –k+g | 2k-2g |
| k-3g | g | –k-g | k | –k+3g |
| 2g | –k-3g | 2k+2g | –3k-g | 2k |

На этом можно считать, что основные сложности процесса построения магических квадратов нечетного порядка предлагаемым нами методом, преодолены. Как это можно увидеть, получается довольно простой порядок построения элементов таблицы. Соответственно, алгоритм надстройки магических квадратов порядка 7, 11, 15, … и квадратов порядка 9, 13, 17, … будет одинаковым.

Отметим, что алгоритм надстройки магических квадратов проще всего продемонстрировать путем демонстрации «магического квадрата» 9-го порядка:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –4k | 7k+g | –6k-2g | 5k+3g | –4k-4g | 3k+5g | –2k-6g | k+7g | –4g |
| 7k-g | –3k | 5k+g | –4k-2g | 3k+3g | –2k-4g | k+5g | –3g | –7k+g |
| –6k+2g | 5k-g | –2k | k+3g | –2k-2g | 3k+g | –2g | –5k+g | 6k-2g |
| 5k-3g | –4k+2g | 3k-g | –k | k+g | –g | –3k+g | 4k-2g | –5k+3g |
| –4k+4g | 3k-3g | –2k+2g | k-g | 0 | –k+g | 2k-2g | –3k+3g | 4k-4g |
| 3k-5g | –2k+4g | k-3g | g | –k-g | k | –k+3g | 2k-4g | –3k+5g |
| –2k+6g | k-5g | 2g | –k-3g | 2k+2g | –3k-g | 2k | –k+5g | 2k-6g |
| k-7g | 3g | –5k-g | 4k+2g | –3k-3g | 2k+4g | –k-5g | 3k | –k+7g |
| 4g | –7k-g | 6k+2g | –5k-3g | 4k+4g | –3k-5g | 2k+6g | –k-7g | 4k |

Несложно убедиться в том, что если убрать внешнюю полоску, то получится «магический квадрат» 7-го порядка, далее 5-го, 3-го.

К сожалению, существует проблема, которая заставляет нас брать в кавычки термин «магический квадрат». Дело в том, что среди элементов построенных квадратов могут быть одинаковые. Пример такой ситуации уже приводился. Поэтому необходима соответствующая проверка и корректировка. О том, как это может быть проведено покажем на числовом примере.

Поскольку появление одинаковых элементов вызывается тем, что линейные комбинации $c$ и $d$ принимают одинаковые числовые значения, желательно выбрать простые значения. Давайте положим $k = 11$ и $g = 3$. Подставив эти значения, получим числовой квадрат порядка 9:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –44 | 80 | –72 | 64 | –56 | 48 | –40 | **32** | –12 |
| 74 | –33 | 58 | –50 | 42 | –34 | 26 | –9 | –74 |
| –60 | 52 | –22 | 36 | –28 | 20 | –6 | –52 | 60 |
| 46 | –38 | 30 | –11 | 14 | –3 | –30 | 38 | –46 |
| –32 | 24 | –16 | 8 | 0 | –8 | 16 | –24 | **32** |
| 18 | –10 | 2 | 3 | –14 | 11 | –2 | **10** | –18 |
| –4 | –4 | 6 | –36 | 28 | –20 | 22 | **4** | **4** |
| –10 | 9 | –58 | 50 | –42 | 34 | –26 | 33 | **10** |
| 12 | –80 | 72 | –64 | 56 | –48 | 40 | –32 | 44 |

Путем непосредственных вычислений можно дополнительно убедиться в том, что суммы по всем строчкам, столбцам и двум диагоналям равны нулю. Для того чтобы убедиться в магичности построенных квадратов порядка 3, 5, 7 и 9, осталось проверить, что числа в таблице не повторяются. Это можно проделать разными способами. Мы используем самый простой, поскольку вместе с каждым положительным числом в таблице присутствует противоположный ему по знаку, выпишем все неотрицательные элементы в порядке возрастания:

3, **4**, **4**, 6, 8, 9, **10**, **10**, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, **32**, **32**, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 56, 58, 60, 64, 72, 74, 80.

Отметим повторяющиеся числа (выделены жирным черным цветом) в таблице тоже жирным черным. В итоге увидим, что хотя бы одно из чисел каждой выделенной пары расположено на внешней полоске. Это означает, что таблицы порядка 3, 5 и 7 являются магическими, а для того, чтобы сделать магическим квадрат порядка 9, нужно убрать повторения. Это можно сделать разными способами. Предлагаем следующий: поменяем повторяющиеся числа, которые расположены в последнем столбце на наименьшие из неиспользованных натуральных чисел. В данном случае – 4 на 1, 10 на 5, 32 на 7. В итоге, сумма положительных чисел этого столбца уменьшилась на: (4–1) + (10–5) + (32–7) = 33. Для того чтобы сохранить магическую сумму 0 этого столбца, нужно соответственно изменить отрицательные числа. Для этого, в данном случае достаточно заменить –74 на –41. Также нужно проделать соответствующие операции в первом столбце.

В итоге получится магическая таблица порядка 9, построенная как «матрешка» – если в ней убрать внешнюю полоску, то получится магический квадрат порядка 7 и так далее:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –44 | 80 | –72 | 64 | –56 | 48 | –40 | **32** | –12 |
| **41** | –33 | 58 | –50 | 42 | –34 | 26 | –9 | **–41** |
| –60 | 52 | –22 | 36 | –28 | 20 | –6 | –52 | 60 |
| 46 | –38 | 30 | –11 | 14 | –3 | –30 | 38 | –46 |
| –7 | 24 | –16 | 8 | 0 | –8 | 16 | –24 | 7 |
| 18 | –10 | 2 | 3 | –14 | 11 | –2 | **10** | –18 |
| **–1** | -4 | 6 | –36 | 28 | –20 | 22 | **4** | 1 |
| **–5** | 9 | –58 | 50 | –42 | 34 | –26 | 33 | 5 |
| 12 | –80 | 72 | –64 | 56 | –48 | 40 | –32 | 44 |

Существуют и другие методы построения магических квадратов. О них можно узнать, обратившись к соответствующей математической литературе. Например, [7]. Желаем успехов!

**Заключение.** В работе рассмотрен новый метод построения магических квадратов нечетной степени. Известно, существует несколько эффективных способов построения таких квадратов. Например, метод террас. Но они, как правило, предполагают, что построение магического квадрата каждый раз должно начинаться «с нуля». В отличие от них, магические квадраты, построенные по предлагаемому методу, составлены по принципу «матрешки»: каждый магический квадрат порядка $2n+1$ содержит магический квадрат порядка $2n–1$.

Следует отметить, что наряду с научной новизной, так же, как и работы [8, 9], данная работа имеет большое методическое значение.

Поступила: 16.06.2025; рецензирована: 30.06.2025; принята: 02.07.2025.

***Литература***

1. *Кыдыралиев С.К.* Нестареющие магические квадраты. Часть 1 / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 15–19.
2. *Кыдыралиев С.К.* Нестареющие магические квадраты. Часть 2 / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 20–24.

3. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. М.: Книга по требованию, 2012. 185 с.
4. *Постников М.М.* Магические квадраты / М.М. Постников. М.: URSS, 2017. 88 с.
5. *Гарднер М.* Математические досуги / М. Гарднер. М.: Мир, 1972.
6. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1989. 352 с.
7. *Чебраков Ю.В.* Теория магических матриц / Ю.В. Чебраков. СПб., 2008.
8. *Кыдыралиев С.К.* Еще раз про разность квадратов / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, С.Н. Джапарова // Вестник КРСУ. 2024. Т. 24. № 4. С. 4–9.
9. *Кыдыралиев С.К.* От уравнений Бернулли к уравнениям Риккати и Абеля / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2024. Т. 24. № 8. С. 4–9.